Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$

1°) Calculer U_1 et U_2.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}$.

b) Etudier la monotonie de (U_n).

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) Déduire que pour tout $n \in IN$: $U_n - 1 \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

1°) $U_1 = (U_0 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \boxed{\frac{5}{4}}$

$U_2 = (U_1 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \boxed{\frac{17}{16}}$

2) a)

Pour $n = 0$ $\quad 1 \leqslant U_0 = \frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2}$ Vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant U_n \leqslant \frac{3}{2}$

et montrons que $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$

.) On a $\quad 1 \leqslant U_n \leqslant \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant U_n - 1 \leqslant \frac{1}{2}$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn